数理解析研究所講究録
391巻 1980年 108-118

制御確率微分方程式の自由境界問題

神戸大 理. 西尾真喜子

マルコフ過程の最適停止の問題が，自由境界問題に関連していることはよく知られている。確率微分方程式にしたがって運動する系に制御を行い，さらに最適停止を合わせて考えると，ベルマン方程式の自由境界問題が関連してくる。この場合，最適制御に対する半群が，マルコフ過程の推移半群の役目をする．

§1. 最適問題に関連する半群.

$\Gamma \subset R^k$ をコンパクト凸集合。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の n 次元ブラウン運動を $(B(t), t \geqq 0)$ として. $\mathcal{F}_t = \sigma(B(s), s \leqq t)$ とおく。$\mathcal{F}_t$-発展的可測な Γ-値確率過程を admissible control とよび，その全体を $\mathfrak{A}$ とかく.

$\alpha(x, u)$ を $n \times n$ 対称行列，$\gamma(x, u) \in R^n$ で，ともに $R^n \times \Gamma$ 上の関数として，次の条件を仮定しておく.

(A.1) 有界，$|h(x,u)| \le b, \quad \forall x \in R^n,\ u \in \Gamma$

(A.2) u に関して一様に，x の Lipschitz 連続，かつ，x に関し一様に，u の連続関数，i.e.

$$|h(x,u) - h(x',u')| \le K|x-x'| + \rho(|u-u'|)$$

ここで，ρ は $\rho(0) = 0$ となる $[0,\infty)$ 上の連続有界関数．

$U \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$ に対し，制御確率微分方程式

$$(1.1) \qquad \begin{cases} dX(t) = \alpha(X(t), U(t))\, dB(t) + \gamma(X(t), U(t))\, dt \\ X(0) = x \end{cases}$$

は，$\mathcal{F}_t$ に適合した一意解 $X(t) = X(t; U, x)$ をもつ．この解を U の response とよぶ．たとえば，定数コントロール $u (\in \Gamma)$ の response ξ^u は，生成作用素が $L^u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^u(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \gamma_i^u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$，ただし $a^u(x) = \frac{1}{2}\alpha^2(x,u)$，で与えられる diffusion である．以後 $h(x,u)$ を $h^u(x)$ とかくこともある．

$\mathcal{F}_t$-停止時間の全体を $\mathcal{M}$，$\mathcal{M}(t) = \{t \wedge \tau,\ \tau \in \mathcal{M}\}$ とする．

$$f;\ R^n \times \Gamma \longrightarrow R^1, \qquad c;\ R^n \times \Gamma \longrightarrow [0,\infty)$$

が，ともに (A1) (A2) をみたすことを仮定する．pay off $I(t,x,\varphi,U)$ を次のように定義する

$$I(t,x,\varphi,U) = \int_0^t e^{-\int_0^s c(X(\theta), U(\theta))\, d\theta} f(X(s), U(s))\, ds + e^{-\int_0^t c(X(\theta), U(\theta))\, d\theta} \varphi(X(t))$$

ただし，$X(t) = X(t; U, x)$.

最適制御の optimal value, $Q(t,x,\varphi)=\sup_{U\in\mathfrak{A}} E\,I(t,x,\varphi,U)$

最適停止の optimal value, $V(t,x,\varphi)=\sup_{U\in\mathfrak{A},\,\tau\in\mathfrak{M}(t)} E\,I(\tau,x,\varphi,U)$

R^n 上の有界，一様連続な実数値関数の全体を C とすれば，ノルム $\|\varphi\|=\sup_{x\in R^n}|\varphi(x)|$ と順序 "$\varphi\le\psi \iff \varphi(x)\le\psi(x)$ $\forall x$" を与えることにより，Banach lattice になる。

(A 1), (A. 2) により，$\varphi\in C$ ならば，$Q(t,\cdot,\varphi)$, $V(t,\cdot,\varphi)$ も C に属する．C 上の作用 $Q(t)$, $V(t)$ を次式により定義しよう．

$$(1.2)\qquad Q(t)\varphi=Q(t,\cdot,\varphi),\quad V(t)\varphi=V(t,\ ,\varphi)$$

u の response ξ^u を c^u rate で killing した diffusion の推移半群を $H^u(t)$ とおけば，$T^u(t)\varphi=H^u(t)\varphi+\int_0^t H^u(s)f^u ds$ $(=E\,I(t,\cdot,\varphi,u))$ $\varphi\in C$，により与えられる作用 $T^u(t)$ は単調縮小半群で，生成作用素 G^u は

$$G^u\varphi=L^u\varphi-c^u\varphi+f^u,\qquad \varphi\in C^2$$

ただし，$C^2=\{\varphi\in C;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\in C,\ i,j=1\cdots n\}$.

定理 1．[3]．$Q(t)$ は次の性質をもつ

(Q 1) 半群性，$Q(t+s)=Q(t)Q(s)=Q(s)Q(t)$, $Q(0)=\text{identity}$

(Q 2) 連続性，$\|Q(t)\varphi-Q(s)\varphi\|\longrightarrow 0$ as $t\to s$

(Q3) 単調性，$\varphi \leq \psi \Longrightarrow Q(t)\varphi \leq Q(t)\psi$

(Q4) 縮小性，$\| Q(t)\varphi - Q(t)\psi \| \leq \| \varphi - \psi \|$

(Q5) $\mathcal{G}$ を $Q(t)$ の生成作用素とすれば，$\mathcal{D}(\mathcal{G}) \supset C^2$，かつ，

(1.3) $$\mathcal{G}\varphi = \sup_{u \in \Gamma} \mathcal{L}^u \varphi \qquad \varphi \in C^2$$

(Q6) $$Q(t)\varphi \geqq T^u(t)\varphi \qquad \forall u\ t\ \varphi.$$

(Q7) 最小性，$\Lambda(t)$, $t \geqq 0$ が C 上の半群 (i.e. (Q1) (Q2) をみたす) で，$\Lambda(t)\varphi \geqq T^u(t)\varphi \quad \forall u\ t\ \varphi$

$$\Longrightarrow \Lambda(t)\varphi \geqq Q(t)\varphi \qquad \forall t, \varphi.$$

半群性(Q1) はベルマン原理とよばれる2段階最適化に他ならない，また，(1.3) がベルマン方程式に関連している。

(Q7)より，半群の envelope を次のように定義しよう．

$(S(t), t \geqq 0)$, $(\mathcal{H}^u(t)\ t \geqq 0)$ $u \in \Gamma$ を C 上の半群とする．$S(t)$ が次の (e1), (e2) をみたすとき，$(\mathcal{H}^u(t), t \geqq 0)$ $u \in \Gamma$ の envelope という．

(e1) $$S(t)\varphi \geqq \mathcal{H}^u(t)\varphi \qquad \forall u\ t\ \varphi$$

(e2) C 上の半群 $\Lambda(t)$, $t \geqq 0$, が $\Lambda(t)\varphi \geqq \mathcal{H}^u(t)\varphi$ $\forall u\ t\ \varphi$, $\Longrightarrow \Lambda(t)\varphi \geqq S(t)\varphi \quad \forall t\ \varphi.$

定理2，[4]．$V(t)$, $t \geqq 0$ は単調縮小半群で，生成作用素 $\mathcal{A}$ は，$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \supset C^2$ かつ，$\varphi \in C^2$ のとき

(1.4) $$\mathcal{A}\varphi = \max(0, \sup_{u \in \Gamma} \mathcal{L}^u \varphi) = \max(0, \mathcal{G}\varphi).$$

さらに，$I(t)$ を identity map とすれば，$(V(t),\ t\geq 0)$ は $(T^u(t)\ \ t\geq 0)\ u\in\Gamma$ と $(I(t),\ t\geq 0)$ の envelop になる．これは，$(Q(t),\ t\geq 0)$ と $(I(t),\ t\geq 0)$ の envelope と同値である．

§2. $V(t)\varphi$ の regularity と自由境界問題

$V(t)\varphi$ のなめらかさを導くため，係数 $h=\alpha,\gamma,c,f$ は x について2回連続微分可能で，次の条件を仮定しよう．

(A3)　1次微分は (A1)(A2) をみたす

(A4)　2次微分は (A1) をみたし，u に関して一様に，x のヘルダー連続，x に関して一様に，u の連続関数，i.e

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(x,u)-\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(x',u')\right|\leq K|x-x'|^\delta+\rho(|u-u'|)$$

(A5)　適当な $\lambda>0$ に対し．

$$\sum_{ij=1}^n \alpha_{ij}(x,u)\theta_i\theta_j\ \geq\ \lambda|\theta|^2\qquad \forall x\ u\ \theta\ .$$

Krylov [1, 2] にしたがって，$Q(t)\varphi$，$V(t)\varphi$ のなめらかさについて次の定理3，4が証明できる．

定理3．$\varphi\in C^2$ の2次微分がヘルダー連続とする．(A1)〜(A5) の下で

(i)　$Q(t)\varphi(x)$，$V(t)\varphi(x)$ は $W^{1,2}_{p,\,loc}$ に属する．ここで p は

任意に大きくてよい。

(ii) $\forall u \in \Gamma$ に対し

$$L^u Q(t)\varphi(x) - c^u(x)\,Q(t)\varphi(x) + f^u(x) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t)\varphi(x)$$

$$L^u V(t)\varphi(x) - c^u(x)\,V(t)\varphi(x) + f^u(x) - \frac{\partial}{\partial t}V(t)\varphi(x)$$

は，ともに，$[0,T]\times R^n$ 上で本質的に有界．

(iii)．$Q(t)\varphi(x)$ は次のベルマン方程式 (2.1) の $W^{1,2}_{2n+2,\,loc}$ における一意解になる．

$$(2.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t}(t,x) = \sup\limits_{u\in\Gamma} L^u q(t,x) - c^u(x)\,q(t,x) + f^u(x), & \tilde{\forall}\, t,x \\ q(0,x) = \varphi(x) & \forall x \end{cases}$$

ただし，(2.1) の右辺では，q の1次微分，2次微分を固定して，u に関する supremum をとることにする。

定理4．前定理と同じ条件で，$V(t)\varphi(x)$ は次の自由境界問題 (2.2) の $W^{1,2}_{2n+2,\,loc}$ における一意解になる．

$$(2.2)\quad \begin{array}{lll} \text{(i)}. & v(0,x) = \varphi(x) & \forall x \\ \text{(ii)} & v(t,x) \geqq \varphi(x) & \forall t\ x \\ \text{(iii)} & \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) \geqq \sup\limits_{u\in\Gamma} L^u v(t,x) - c^u(x)\,v(t,x) + f^u(x), & \tilde{\forall}\, t,x \\ \text{(iv)} & (v(t,x) - \varphi(x))\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \sup\limits_{u\in\Gamma} L^u v(t,x) - c^u(x)\,v(t,x) + f^u(x)\right) = 0, & \tilde{\forall}\, t,x \end{array}$$

定理4により，$v(t,x)=V(t)\varphi(x)$ は生成作用素 $\mathcal{A}$ に対する発展方程式の解となることがわかる。何故ならば，

$$D=\{(t,x)\in[0,\infty)\times R^n;\ V(t)\varphi(x)=\varphi(x)\}$$

とおけば，D は閉集合で，$(0,x)\in D$, $\forall x$. さらに，$V(t)\varphi(x)$ は t の増大関数であるから，"$t\leq T(x)\Rightarrow(t,x)\in D$, $t>T(x)\Rightarrow(t,x)\notin D$" となる $T(x)(\leqq\infty)$ が定まる。ゆえに，(iv) より，$\forall t,x$ に対し

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=0\,\chi_D(t,x)+\left(\sup_{u\in\Gamma}L^u v(t,x)-c^u(x)v(t,x)+f^u(x)\right)\chi_{D^c}.$$

(iii) と $\dfrac{\partial v}{\partial t}\geqq 0$ を考え合わせると，$\forall t\,x$ に対し

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=\max\left(\sup_{u\in\Gamma}L^u v(t,x)-c^u(x)\,v(t,x)+f^u(x),\ 0\right) \tag{2.3}$$

定理4. (iv) の証明の概略を示そう. 次の不等式 Lemma 1 が有用である.

A ; $n\times n$ 対称行列の値をとる $\mathcal{F}_t$－発展的可測な確率過程で，$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,\omega)\,\theta_i\,\theta_j\geq\lambda|\theta|^2$ $\forall t,\omega,\theta$, $|A(t,\omega)|\leq K$ $\forall t\,\omega$.

R ; $\mathcal{F}_t$－発展的可測な n 次元確率過程で，$|R(t,\omega)|\leq K$, $\forall t\,\omega$.

上の条件をみたす (A,R) の全体を $M=M_{K,\lambda}$ とする.

$S = S(0, d)$ を，中心 0 半径 d の n 次元開球，σ を $\bar{S}^c$ への hitting time とする。

Lemma 1.

$$W(t, x; h, \mu, K, \lambda, d) = \sup_{(A,R)\in M} E\int_0^{(T-t)\wedge\sigma} e^{-\mu s} h\left(t+s, x+\int_0^t A\,dB+\int_0^s R\,d\theta\right)ds$$

とおけば，$\mu \geq \frac{1+2K}{n\lambda^2}$，$p \geq 2n+2$ のとき

$$\|W\|_{L_p([0,T]\times S)} \leq \|h\|_{L_p([0,T]\times S)}\ \tilde{K}/\mu$$

ここで $\tilde{K}$ は K, n, λ のみに依存する定数。

(iv) を示すために，random stopping を導入する。
$\mathcal{F}_t$-発展的可測な非負有界確率過程の全体を $\mathcal{R}$ とする。
$r \in \mathcal{R}$ に対し，次の random stopping を考え，

$$(2.4)\qquad P\left((t, t+dt) \text{ で stop } / \ t \text{ 迄に stop しない}\right) = r(t)\, e^{-\int_0^t r(s)ds}\, dt.$$

pay off J を次式で与える。

$$J(T, x, \varphi, U, r) = \int_0^T I(t, x, \varphi, U)\, r(t)\, e^{-\int_0^t r(s)ds}\, r(t)\, dt + I(T, x, \varphi, U)\, e^{-\int_0^T r(s)ds}$$

すなわち，T 迄の stop を density $r(t)$ の random stopping で行う。
T で停止することは，random stopping の極限とみな

せるが，実際，次の Lemma 2 が成立つ．

Lemma 2.

$$V(T)\varphi(x)=\sup_{U\in\mathfrak{U},\,r\in\mathcal{R}} EJ(T,x,\varphi,U,r)$$

以後簡単のため，

$$F(t,x,u,h)=L^u h(t,x)-c^u(x)h(t,x)+f^u(x)+\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)$$

とおく．T を任意に固定して，$h(t,x)=V(T-t)\varphi(x)$ とすれば，Lemma 2 より

$$(2.5)\quad 0=\sup_{U\in\mathfrak{U}\ r\in\mathcal{R}}\Bigg(E\int_0^T e^{-\int_0^t c(X(s;U,x),U(s))+r(s)ds} F(t,X(t;U,x),U(t),h)\,dt$$

$$+E\int_0^T e^{-\int_0^t c(X(s;U,x),U(s))+r(s)ds}\, r(t)\big(\varphi(X(t;U,x))-h(t,X(t;U,x))\big)dt$$

$D_\varepsilon(T)=\{(t,x)\in[0,T]\times R^n;\ \ V(T-t)\varphi(x)\leq\varphi(x)+\varepsilon\}$

とおけば，$D_\varepsilon(T)$ は閉集合．ゆえに，$(0,y)\notin D_\varepsilon(T)$ のとき，$[0,\Delta]\times S(y,\delta)\subset D_\varepsilon(T)^c$ となる $\Delta,\delta>0$ がえらべる．τ を $\partial S(y,\delta)$ への hitting time とする．(2.5) に定理の (iii) を用いると，T を $T\wedge\tau$ に代えることが出来る．

$x\in S(y,\delta)$ を任意に固定し，(U_k,r_k) を supremum への近似列とする．$t<\tau$ のとき，$\varphi(X(t))-h(t,X(t))<-\varepsilon$ となるから，$F\leq 0$ に注意すれば

$$E\int_0^{T\wedge\tau_n} e^{-\int_0^t r_n(s)\,ds}\, r_n(t)\,dt \longrightarrow 0 \qquad \text{as } n\to\infty$$

ここで τ_n は $X(t;U_n,x)$ の $\partial S(y,\delta)$ への hitting time。ゆえに

$$(2,6)\qquad e^{-\int_0^{T\wedge\tau_n} r_n(s)\,ds} \longrightarrow 1 \quad \text{in proba.}$$

再び、(2,5) (2,6) より

$$(2,7)\qquad E\int_0^{T\wedge\tau_n} F(t, X(t;U_n,x), U_n(t), h)\,dt \longrightarrow 0, \text{ as } n\to\infty.$$

$$M_T(t,x) = \sup_{u\in\Gamma} F(t,x,u,V(T-\cdot)\varphi)$$

とおけば、(iii) と (2,7) より、$M_T \leq 0$ かつ

$$\sup_{(A,R)\in M} E\int_0^{\Delta\wedge\tau} M_T(t, x+\int_0^t A\,dB + \int_0^t R\,d\theta)\,dt = 0$$

ところが、T を $T-s$ $(s<\Delta)$ に代えると、

$$V(T-s-t)\varphi(x) \geq V(T-\Delta)\varphi(x) > \varphi(x)+\varepsilon, \qquad t+s\leq\Delta,\ x\in S(y,\delta).$$

ゆえに、$[0,\Delta-s]\times S(y,\delta) \subset D_\varepsilon(T-s)^c$, となるから、同様な計算により

$$\sup_{(A,R)\in M} E\int_0^{(\Delta-s)\wedge\tau} M_{T-s}(t, x+\int_0^t A\,dB + \int_0^t R\,d\theta)\,dt = 0.$$

M_Tの定義より、$M_{T-s}(t,x) = M_T(t+s,x)$ となるから

$$\sup_{(A,R)\in M} E\int_0^{(\Delta-s)\wedge\tau} M_T(t+s,\, x+\int_0^t A\,dB+\int_0^t R\,d\theta)\,dt = 0$$

$M_T \leq 0$ であるから，上式より

$$\sup_{(A,R)\in M} E\int_0^{(\Delta-s)\wedge\tau} \mu e^{-\mu t} M_T(t+s,\, x+\int_0^t A\,dB+\int_0^t R\,d\theta)\,dt = 0.$$

Lemma 1 より，$\mu \to \infty$ として

$$M_T(s,\, x) = 0 \qquad \tilde{\forall}(s,x)\in[0,\Delta]\times S(y,\delta)$$

を得る．すなわち．殆んどすべての $(t,x)\in(T-\Delta,T)\times S(y,\delta)$ で

(2.8) $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}V(t)\varphi(x) = \sup\limits_{u\in\Gamma} L^u V(t)\varphi(x) - c^u(x)\,V(t)\varphi(x) + f^u(x).$

一方，$\theta > 0$ に対して，$V(t)\varphi$ の増大性より

$$[0,\, \Delta+\theta]\times S(y,\delta) \subset D_\varepsilon(T+\theta)^c.$$

ゆえに，(2.8) は殆んどすべての $(t,x)\in(T-\Delta,\, T+\theta)\times S(y,\delta)$ で成立つ．(T,y) は $V(T)\varphi(y) > \varphi(y)+\varepsilon$ となる任意の点でよいから，$\varepsilon \searrow 0$ として，(iv) を得る．

Reference

1. N. V. Krylov, The control of the solution of a stochastic integral equation Th. Proba. Appl 17 (1972), 114–131

2. ———, Some estimates of the probability density of a stochastic integral, Math. USSR. Izv. 8 (1974) 233–254.

3. M. Nisio, On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semigroup Proc. Int. Symp. S.D.E. Kyoto 1976 297–325

4. ———, On nonlinear semigroup associated with optimal stopping for Markov processes, Appl. Math. Opt. 4 (1978) 143–169.